DESCRIPCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO SIMPLE DE CIRCULACIÓN DEL AGUA EN LA CUENCA DEL PACÍFICO COLOMBIANO

Valery Tchantsev, Orientador Científico, PhD. Oceanólogo, C.C.C.P

Resumen

Se describe en forma detallada un modelo tridimensional de circulación costera del océano, multi-capas, con ecuaciones primitivas, dependientes del tiempo, y de la superficie libre. El modelo se ha diseñado para representar la física del océano de la manera más real posible dado el estado actual del arte de modelar, dirigido a unos fenómenos de escala de tiempo mensual y 50-100 km de longitud, los cuales dependen de la resolución de la grilla y el tamaño de la cuenca. Las ecuaciones generales junto con sus condiciones de frontera son resueltas mediante el método de diferencias finitas. Para los cómputos se emplean grillas de malla tanto horizontal como verticalmente. Se adopta un esquema numérico implícito y la técnica de modo de separación en el tiempo para dar mayor eficiencia los cómputos.

Abstract

A three-dimensional, multi-layers, primitive equations, time-dependent, free surface, coastal ocean circulation model is described in detail. The model has been designed to represent ocean physics as realistically as possible given the present-day state of the art and to address phenomena of monthly time scale and 50-100 km length depending on basin size and grid resolution. The governing equations together with their boundary conditions are solved by finite difference techniques. A horizontally and vertically staggered lattice of grid points is used for the computations. An implicit numerical scheme and a mode splitting technique in time have been adopted for computational efficiency.

1. INTRODUCCIÓN

La zona costera es una región que recibe especial atención debido a la creciente utilización de su recursos. Las necesidades de desarrollo han conducido a orientar esfuerzos hacia la investigación de los mecanismos generales que rigen la circulación oceánica sobre la plataforma continental. El conocimiento de la circulación es útil para optimizar la administración de recursos, como los biológicos entre otros. Los derrames de petróleo y otros materiales a las regiones del mar donde se realizan actividades de transporte de petróleo y perforación pueden ocurrir y afectar significativamente el medio ambiente. Por lo tanto la predicción del movimiento de estos contaminantes es un proceso importante.

El propósito de este artículo es proveer una descripción relativamente detallada de un modelo numérico de circulación, que se desarrolló durante 1997-98 en el Centro Control Contaminación del Pacífico. El modelo pertenece a esa clase de modelos en los cuales su realismo es un objetivo importante y se dirige a fenómenos de meso-escala, procesos que se desarrollan en 50-100 km de longitud y escalas de tiempo de 30 días, observados usualmente en el océano costero [Beardsley y Boicourt, 1981]. El modelo es tridimensional de multi-capas del océano costero. Las variables a pronosticar son las tres componentes de velocidad de corriente, temperatura, salinidad y elevación de la superficie libre.

2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

2.1. Ecuaciones del modelo

Las ecuaciones que forman la base del modelo de circulación, describen los campos de elevación de superficie y velocidad, y los campos de salinidad y temperatura. Dos aproximaciones de simplificación se usan *[Bryan, 1969]*; la primero, asume que el peso del fluido equilibra idénticamente la presión (aproximación hidrostática), y la segunda, las diferencias de densidad no son tenidas en cuenta (aproximación de *Boussinesq*).

Considere un sistema de coordenadas ortogonales en el cual $\boldsymbol{x}$ es aumentado hacia el este, $\boldsymbol{y}$ es aumentado hacia el norte, y $\boldsymbol{z}$ es aumentado verticalmente hacia abajo. La superficie libre se ubica en $\boldsymbol{z = \zeta(x,y,t)}$ y el fondo de la capa de calculo está en $\boldsymbol{z = H}$. Las ecuaciones de movimiento de *Reynolds* son:

La ecuación de continuidad es

(1)

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}+W\frac{\partial U}{\partial z}-2\Omega Sin\varphi V =$$
$$-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}K_Z\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}K_H\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}K_H\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}K_H\frac{\partial V}{\partial x}$$

(2)

$$\frac{\partial V}{\partial t}+U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}+W\frac{\partial V}{\partial z}+2\Omega Sin\varphi U =$$
$$-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}K_Z\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}K_H\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}K_H\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}K_H\frac{\partial U}{\partial y}$$

(3)

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0$$

La ecuación de aproximación hidrostática es

(4)

$$\frac{\partial P}{\partial z}=g\rho$$

donde ρ_o - la densidad de referencia

ρ - la densidad in situ,

$\boldsymbol{g}$ - la aceleración gravitatoria,

$\boldsymbol{P}$ - la presión,

$\boldsymbol{K_Z}$ - el coeficiente vertical de viscosidad turbulenta,

$\boldsymbol{K_H}$ - el coeficiente horizontal de viscosidad turbulenta.

La presión en la profundidad z puede ser obtenida mediante la integración de la ecuación de aproximación hidrostática (4), desde z hasta la superficie libre ζ, y queda:

(5)

$$P=P_a+g\int_{\zeta}^{z}\rho dz$$

De aquí en adelante, la presión atmosférica, $\boldsymbol{P_a}$ se asume constante.

Las ecuaciones de conservación de temperatura y salinidad pueden escribirse como

(6)

$$\frac{\partial T}{\partial t}+U\frac{\partial T}{\partial x}+V\frac{\partial T}{\partial y}+W\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}K_T\frac{\partial T}{\partial z}+A_T\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right.$$

(7)

$$\frac{\partial S}{\partial t}+U\frac{\partial S}{\partial x}+V\frac{\partial S}{\partial y}+W\frac{\partial S}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}K_S\frac{\partial V}{\partial z}+A_S\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)$$

donde $\boldsymbol{K_T}$ y $\boldsymbol{K_S}$ - los coeficientes de difusión turbulenta vertical de temperatura y salinidad respectivamente, $\boldsymbol{A_T}$ y $\boldsymbol{A_S}$ - los coeficientes de difusión turbulenta horizontal de la temperatura y la salinidad respectivamente.

Según la ecuación de estado la densidad se computa usando la temperatura y la salinidad, de la forma

(8)

$$\rho=\rho(T,S)$$

dado por *Fofonoff* [1962].

La ecuación de continuidad (5) se integra de z desde la superficie libre hasta el fondo de capa de modelación H para tener la ecuación para la elevación de la superficie libre

(9)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{\zeta}^{H}Udz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{\zeta}^{H}Vdz$$

2.2. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera en el superficie libre, $z = \zeta(x,y)$, son

(10)

$$\tau_{X0}=-\rho_0\left(K_Z\frac{\partial U}{\partial z}\right)_0=C_d\rho_0U_a|U_a| \quad \tau_{Y0}=-\rho_0\left(K_Z\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0=C_d\rho_0V_a|V_a|$$

(11)

$$Q_0=-\left(K_T\frac{\partial T}{\partial z}\right)_0 \qquad M_0=-\left(K_T\frac{\partial S}{\partial z}\right)_0$$

donde τ_{X0}, τ_{Y0} - los componentes de tensión del viento en superficie,

$\boldsymbol{Q_0}$, $\boldsymbol{M_0}$ - los flujos turbulentos de calor y sal,

$\boldsymbol{C_d}$ - el coeficiente de resistencia.

El componente vertical de velocidad de la corriente se determina a partir la condición de distribución no-uniforme de elevación de la superficie libre

(12)

$$W_0=\frac{\partial\zeta}{\partial t}+U_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}+V_0\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

En la frontera del fondo, $z = \boldsymbol{H}$, se dispone de la condición de ausencia de movimiento

(13)

$$W_H=U_H=V_H=0$$

y

(14)

$$\tau_{XH}=\tau_{YH}=0;\quad Q_H=0;\quad M_H=0;\quad T=T_H;\quad S=S_H$$

Las condiciones de impenetración y deslizable (no hay fricción) están en la frontera de borde (la costa). En las fronteras de borde de la cuenca, los gradientes normales de T, S, U, V y z son cero para que no hayan los impulsos de advección y difusión y flujos de calor y sal a través de estas fronteras

(15)

$$U_n=0;\quad V_n=0;\quad \frac{\partial U_\tau}{\partial n}=0;\quad \frac{\partial\zeta}{\partial n}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial n}=0;\quad \frac{\partial S}{\partial n}=0.$$

La condición de penetración libre está en la frontera abierta. Existen dos tipos de condiciones de frontera abierta, el flujo y el reflujo. Los datos de velocidad de corriente, temperatura y salinidad en la frontera, son los de condición de flujo, considerando en las condiciones de reflujo,

(16)

$$\frac{\partial}{\partial t}(V,T,S)+U_n\frac{\partial}{\partial n}(V,T,S)=0;\quad \frac{\partial\zeta}{\partial n}=0;$$

se resuelve donde el subíndice $\boldsymbol{n}$ es una coordenada normal a la frontera.

2.3. Esquema numérico

El modelo es de multi-capas. El área de integración se divide por **N** número de capas de espesor fijo η. Solo la capa superior tiene espesor variable, $\eta+\zeta$. Las ecuaciones (1) - (3) y (6) - (7) tomando en cuenta (4) y las condiciones de frontera en la superficie libre y en el fondo de la capa de modelación, se integran dentro de cada capa por z, desde la superficie libre, ζ, hasta el fondo de la capa de modelación, $\boldsymbol{H}$. Después de la integración de las ecuaciones de movimiento y de conservación de temperatura y salinidad se obtiene

(17)

$$\frac{\partial U_k}{\partial t}+\frac{\partial U_k^2}{\partial x}+\frac{\partial U_kV_k}{\partial y}-U_kW_k-fV_k=$$
$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_a}{\partial x}+\frac{P_a}{\rho_0}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{g}{\rho_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int_{Z_k}^{Z_{k+1}}\rho dz+2\frac{\tau_{xk}}{\eta}+K_H\left(\frac{\partial^2U_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U_k}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V_k}{\partial x\partial y}\right)-R_{Xk}$$

(18)

$$\frac{\partial V_k}{\partial t}+\frac{\partial U_k V_k}{\partial x}+\frac{\partial V_k^{\,2}}{\partial y}-V_k W_k+fU_k=$$

$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_a}{\partial y}+\frac{P_a}{\rho_0}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{g}{\rho_0}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\int_{Z_k}^{Z_{k+1}}\rho dz+2\frac{\tau_{y_k}}{\eta}+K_H\left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_k}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_k}{\partial x\partial y}\right)-R_{Y\,k}$$

(19)

$$\frac{\partial T_k}{\partial t}+\frac{\partial U_k T_k}{\partial x}+\frac{\partial V_k T_k}{\partial y}-T_k W_k\frac{2}{\eta}=2\frac{Q_k}{\eta}+A_T\left(\frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_k}{\partial y^2}\right)-R_{T\,k}$$

(20)

$$\frac{\partial S_k}{\partial t}+\frac{\partial U_k S_k}{\partial x}+\frac{\partial V_k S_k}{\partial y}-S_k W_k\frac{2}{\eta}=2\frac{M_k}{\eta}+A_T\left(\frac{\partial^2 S_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_k}{\partial y^2}\right)-R_{S\,k}$$

donde

(21)

$$R_{X\,k}=\frac{g}{\eta}\cdot\frac{2}{\rho_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int_{Z_k}^{Z_{k+1}}\int_{z}\rho dz dz+\frac{g}{\rho_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int_{\zeta}^{Z_k}\rho dz+\frac{2}{\eta}U_{k+1}W_{k+1}+fV_{k+1}-R_{X\,k+1}$$

(22)

$$R_{Y\,k}=\frac{g}{\eta}\cdot\frac{2}{\rho_0}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\int_{Z_k}^{Z_{k+1}}\int_{z}\rho dz dz+\frac{g}{\rho_0}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\int_{\zeta}^{Z_k}\rho dz+\frac{2}{\eta}V_{k+1}W_{k+1}-fU_{k+1}-R_{Y\,k+1}$$

(23)

$$R_{T\,k}=\frac{2}{\eta}T_{k+1}W_{k+1}+4\frac{Q_{k+1}}{\eta}-R_{T\,k+1}$$

(24)

$$R_{S\,k}=\frac{2}{\eta}S_{k+1}W_{k+1}+4\frac{M_{k+1}}{\eta}-R_{S\,k+1}$$

donde η es el espesor fijo de cada capa integral.

Las condiciones de frontera en $\boldsymbol{k}$ entrecapas son

(25)

$$\tau_{X\,k}=-\rho_0\left(K_Z\frac{\partial U}{\partial z}\right)_k,\quad \tau_{Y\,k}=-\rho_0\left(K_Z\frac{\partial V}{\partial z}\right)_k$$

(26)

$$Q_k=-\left(K_T\frac{\partial T}{\partial z}\right)_k,\quad M_k=-\left(K_T\frac{\partial S}{\partial z}\right)_k$$

(27)

$$W_k=\frac{\partial}{\partial x}\int_k^H U dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_k^H V dz$$

El coeficiente vertical de viscosidad turbulenta de las capas de integración se computó a partir de la suposición de estabilidad de la ecuación de balance de energía cinética de turbulencia en la forma de *Prandtl*,

(28)

$$K_Z=C_z^{-1/2}l^2\left(\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2+\frac{g}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(29)

$$l=\frac{\chi}{H}\cdot z_H z_k z_0,$$

(30)

$$z_0=1-\beta z_H\frac{z_k}{H^2},\quad z_H=z+\eta+z_0,\quad z_k=\eta+z_0$$

donde $\boldsymbol{C_z}$, χ, β - los constantes adimensionales.

El cálculo del coeficiente horizontal de la viscosidad turbulenta $\boldsymbol{K_H}$ se resuelve para dos condiciones:

(31)

para $0<V/V_e<0.7$ $K_H=L^2\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|$ $L=\chi\cdot y\left[1-e^{-y^+/A}\right]$

(32)

$$y^+=U_\tau\frac{y}{\nu};\quad U_\tau=(0.5\cdot C_f)^{0.5}\cdot V_e,\quad \tilde{N}_f=\frac{1}{0.5\cdot V_e^{\,2}}\nu\frac{\partial V}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

(33)

$$\tilde{N}_f=0.059\,\mathrm{Re}_x^{\,-0.2}\qquad \mathrm{Re}_x=\frac{U_\infty x}{\nu}$$

(34)

para $0.7\leq V/V_e\leq 1$ $K_H=0.0168\cdot V_e\delta^*$

(35)

$$\frac{\delta^*}{x}=0.046\cdot\mathrm{Re}_x^{\,-0.2}$$

donde A = 26 para ∂P/∂? = 0; χ = 0.41,

- $\boldsymbol{V_e}$ - la velocidad de flujo,
- $\boldsymbol{U_8}$ - la velocidad afuera del área del flujo
- $\boldsymbol{x, y}$ - la distancia de flujo a lo largo de los ejes $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$
- ν - la viscosidad molecular.

Se ha desarrollado el modelo matemático de corrientes para la región del Pacífico Colombiano con un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales. Este sistema de ecuaciones generales no puede ser resuelto por un método analítico. Para su solución es necesario usar los métodos numéricos de solución de los problemas de matemática física. Entre los diversos métodos numéricos de solución de problemas de matemáticos físicas, los más universales y efectivos son los Métodos de Diferencias Finitas (de grillas).

El sistema inicial de ecuaciones (1) - (9) es la expresión matemática de las leyes generales de conservación del masa, cantidad de movimiento, y energía en el área de modelación. Por lo tanto, es necesario construir un esquema de diferencia finita para el sistema de ecuaciones (17) - (27) para que también se efectúe en forma análoga a estas leyes. Estos esquemas son los conservadores.

Para la construcción de un esquema conservador de diferencia finita se usa el método de integración-interpolación [Fletcher, 1988]. En este método todas las ecuaciones se escriben tomando en cuenta paridades integradas que expresan las leyes de conservación para la área elemental de grilla.

Para derivar las ecuaciones de diferencia finita, la operación de diferencia se define:

(36)

$$\delta_x F(x,y,z,t) = \frac{F(x+\Delta x,y,z,t) - F(x-\Delta x,y,z,t)}{2\Delta x}$$

Para escribir la diferencial en el tiempo, se usa una operación de diferencia dirigida,

(37)

$$\delta_t F(x,y,z,t) = \frac{F(x,y,z,t+\Delta t) - F(x,y,z,t)}{\Delta t}$$

La solución del sistema de ecuaciones implícitas en el tiempo, de diferencias finitas se hace mediante el método de separación de componentes empleando uso el procedimiento de iteración en el tiempo [Marchuk,1980].

3. CONCLUSIONES

Se presentó un modelo matemático simple de circulación del agua en la Cuenca del Pacífico Colombiano. Este modelo tridimensional, multi - capas, de circulación costera del océano se escribe en forma detallada. El modelo se diseñó para pronosticar los procesos del océano costero y tiene que operar en los modos diagnóstico y pronóstico.

Las ecuaciones de movimiento del modelo tienen en cuenta la velocidad de la corriente así como la distribución integrada de densidad del agua. El trabajo con este modelo está en la etapa de realización de experimentos numéricos para hacer aproximaciones a los parámetros numéricos de las ecuaciones. La descripción detallada de la solución numérica del sistema de ecuaciones, y los resultados numéricos de las experimentos se harán posteriormente.

Bibliografía

BEARDSLEY,R.C., BOICOURT, W.C. *On estuarien and continental-shelf circulation in the Middle Atlantic Bight. In Evolution of Phisical Oceanography.* Edited by Warren, B.A. and Wunsh, C., Cambridge, MIT Press, 1981, pp. 198-234.

BRAYAN, K. A *numerical method for the study of the circulation of the world ocen.* J.Coput.Phys, 1969, ? 3, pp. 347-376.

FLETCHER, C.A.J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics. Fundamental and General Techniques.* Springer - Verlag, Vol. 2, 1988

FOFONOFF, N.P. *Physical properties of sea-water. In The Sea.* V. 1, edited by Hill N.M., New York, 1962, pp. 3-30.

MARCHUK, G.I. *Methods of Computational Mathematics.* Nauka, Moscow, 1980, 420 p.